1998

Московский государственный
технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 2x + \cos 6x = \cos 4x,$$

принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(5x^2 - 6x + 2)}{\lg x} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$2^{x+1} + 3 < 2^{1-x}.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой $M(5; 0)$, другая лежит на графике функции $y = x^3(5-x)$, $0 \le x \le 5$, а вершина прямого угла – на оси Ox?

6. Найдите все значения p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y = 1 + p(x+3), \\ y = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC с углом A, равным 60°. Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды и равно h; ребро TC перпендикулярно стороне основания BC, а угол между ребром TB и биссектрисой основания AD равен 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB?

Вариант 2

1. Завод выпустил две партии изделий, пи этом затраты на изготовление первой партии оказались на 20%, а второй партии – на 25% больше, чем планировалось. Таким образом, общие затраты превысили планируемые на 24% и составили 186 тыс. рублей. Какие затраты планировались на изготовление каждой партии?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos^2\sqrt{x} = \sin\sqrt{x}.$$

3. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{x}} - 5\cdot 2^{x+\frac{1}{x}} + 4 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 + 3x) \le 2.$$

5. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси Ox, а две другие – на графике функции $y = \frac{4}{\sqrt{3}}\cos x$, $|x| \le \frac{\pi}{2}$?

6. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_3\left(2 + \frac{|x|}{x}\right) = (x+2)^2 + a$$

имеет два различных корня. Найдите эти корни при каждом a.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 45° и 60°, а расстояние между диагональю параллелепипеда и не пересекающей ее диагональю основания равно l. Найдите площадь сферы, описанной около параллелепипеда.

1999

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 15 мин. Второй лыжник догнал первого в 15 км от точки старта. Дойдя до отметки 50 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 5 км от точки поворота. Найдите скорости лыжников.

2. Решите уравнение

$$3\cos x + 2\sqrt{2}\cos^2 x + \sqrt{2}\sin^2 x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(5x^2 + 1)}{\lg(2x+1)} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$3^{1+\sqrt{x}} + 2\cdot 3^{2-\sqrt{x}} < 29.$$

5. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{(x-3)^2}{2} = 1.$$

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-6}{|x|-6} = 1, \\ (x-a)^2 + a - 6 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 45° и 60°, а расстояние между боковым ребром и диагональю параллелепипеда, не пересекающей это ребро, равно l. Какой наименьший периметр может иметь сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ?

Вариант 2

1. Два каменщика выложили стены дома, работая сначала вместе 8 дней, а затем один первый каменщик – еще 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то для ее выполнения первому потребовалось бы на 7 дней меньше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выложить стены этого дома?

2. Укажите все значения x, при которых функция

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1$$

принимает наименьшие и наибольшие значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение

$$\log_2(x-2) = 2 - \log_2(x+1).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2 - x - 1} > 0.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции

$$y = (2x-15)(12-x),\ y > 0?$$

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(x+y-1)}{\lg x} = 1, \\ (x-a)^2 + (y-a+5)(y-a) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. В сферу вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC, а высота пирамиды совпадает с ребром TA. Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол 45°, угол между TB и медианой основания CD равен 60°, а расстояние между прямыми TB и CD равно l. Найдите площадь сферы.

2000

Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Слесарь, работая вместе с учеником, собирался выполнить некоторый заказ за 30 дней. После шести дней совместной работы ученик уволился, и слесарь, работая еще 40 дней, закончил выполнение заказа. За сколько дней слесарь, работая один, может выполнить этот заказ?

2. Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin|x| = 5.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4(20x-34) = 2 + \log_2(5-x).$$

4. Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} < 0.$$

5. Стороны OA и OB треугольника OAB лежат на графике функции $y = |x| - x$, а на стороне AB лежит точка $M(0; 1)$. Каким должен быть угловой коэффициент в уравнении прямой AB, чтобы площадь треугольника OAB была наименьшей? Найдите эту площадь.

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = 1 + \log_2 x, \\ (x-a)^2 + (y-x-a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите стороны основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними 30°.

Вариант 2

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

2. Решите уравнение

$$1 + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2^{3-\sqrt{x}} = 25.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\lg(4x^2 - 12x + 9)}{\lg x} < 2.$$

5. Каким должен быть угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат, чтобы расстояние между ее точками пересечения с графиком функции

$$f(x) = 0{,}25x^2 + 2x - 1$$

было наименьшим? Найдите это расстояние.

6. Определите все значения a, при которых уравнение

$$5(x-1)^2 = a(5 - |x| - x)$$

имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

7. В сферу с площадью S вписан прямоугольный параллелепипед. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ, если эта плоскость образует угол 30° с одной диагональю основания, параллельна другой диагонали основания и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

2001

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один рабочий выполнил $5/7$ некоторого заказа, а затем его сменил другой рабочий; таким образом, весь заказ был выполнен за 20 ч. За сколько часов каждый рабочий может выполнить этот заказ, если, работая вместе, они выполнили бы его за 10 ч?

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x + \pi).$$

Укажите его корни, лежащие в промежутке $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$3^{1+\sqrt{x}} + 9 = 28 \cdot \sqrt{3^{\sqrt{x}}}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x}{x-1} + \log_2(x+2) \le 3.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, одна сторона которого лежит на оси x, другая – на прямой $x = 4$, а одна из вершин – на графике функции $y = x^3$ $(0 < x < 4)$?

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 1, \\ \dfrac{x + |x|}{y - a} = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой 6 и стороной основания 11 проведена плоскость, проходящая через апофему TK боковой грани TAB и параллельная медиане BM боковой грани TBC. На каком расстоянии от этой плоскости находится медиана BM?

Вариант 2

1. Один рабочий за час делает на 2 детали меньше, чем другой; соответственно, на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2,5 ч больше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2}\cos x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33.$$

4. Решите неравенство

$$1 + \log_x(3 - 2x) < 0.$$

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = 2$, $CD = 5$ и высотой, равной 4, разбивается на две части прямой, проходящей через вершину A и пересекающей основание CD. Какое наименьшее значение может иметь сумма квадратов площадей этих частей?

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \log_2\left(2 + \dfrac{|x+1|}{x+1} + \dfrac{|x|}{x}\right), \\ (x+4)^2 + (y-a)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD, если расстояние от BD до секущей плоскости равно l, а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 60°.

2002

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Стоимость проезда возросла на 2,5 рубля за одну поездку, поэтому на выделенную сумму в 234 рубля теперь можно сделать ровно на 10 поездок меньше. Сколько сейчас стоит одна поездка?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{6}\sin x .$$

3. Решите уравнение

$$x^{\log_4(3x)}=3^{\frac{1}{\log_3 2}} .$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^3-27}{x^2-9}<\frac{2x+9}{3} .$$

5. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, если на его гипотенузе лежит точка $M(0;\,1)$, а его катеты лежат на прямых $x=-2$ и $y=0$?

6. Укажите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2-16y+63=3\dfrac{|x|}{x}, \\ y-p=(x-2)^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения при указанных p.

7. В прямоугольном параллелепипеде проведена плоскость, которая проходит через его диагональ, образует углы 45° и 30° со сторонами основания и параллельна диагонали основания. Чему равна площадь сферы, описанной около параллелепипеда, если расстояние от этой плоскости до диагонали основания равно l?

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B вышел один пешеход, и с некоторым опозданием − второй. Когда первый прошел половину пути, второй прошел 15 км, а когда второй прошел половину пути, первый прошел 24 км. В пункт B пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 9x+\sqrt{3}\cos 6x+\cos 3x=0 ,$$

принадлежащие промежутку $[\pi/4;\,\pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\log_4(20x-34)=2+\log_2(x-5) .$$

4. Решите неравенство

$$3\cdot 2^x+5<2^{1-x} .$$

5. Найдите площадь прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, одна из вершин расположена на графике функции $y=\dfrac{30}{x}-\dfrac{4x}{3}$, а диагональ имеет наименьшую возможную длину.

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=2\log_2\left(2+\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-9|}{x-9}\right), \\ (y-a-2)^2-x^2=144 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны B_1C_1 основания $A_1B_1C_1$ и параллельной диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, если расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 1, а сторона основания призмы равна $\sqrt{14}$.

1. Если сначала половину заказа выполнит один рабочий, а потом другую половину–второй рабочий, то весь заказ будет выполнен за 2 часа. Если же первый рабочий выполнит одну треть заказа, а потом оставшуюся часть выполнит второй, то весь заказ будет сделан за 2ч 10 мин. Во сколько времени каждый рабочий отдельно может выполнить весь заказ?

Ответ: 1,5 и 2,5 ч.

2. Решить уравнение: $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$

Ответ: $x=-\pi/3+k\pi,\ k\in Z.$

3. Решить уравнение: $\lg\left(x+\frac{3}{2}\right)=\lg\frac{1}{x}.$

Ответ: $\{1/2\}$.

4. Решить неравенство: $\frac{4x}{1+x^2}<1+\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}.$

Ответ: $x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=-x^2+7\cdot|x|-12$ на отрезке $[-4;3]$.

Ответ: $max\ f(x)=1/4$; $min\ f(x)=-12$.

6. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} y+\ln\frac{|y|}{y}=x, \\ y+2(x+a)^2=x+2a+4, \end{cases}$$
имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a. Ответ: $a\in[-1;2)\cup\{-2\}$, $x=y=-a+\sqrt{a+2}$.

7. В сферу радиуса вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой высота равна медиане основания. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AMT, если AT–боковое ребро пирамиды, а точка M лежит на медиане основания, не пересекающей это ребро?

Ответ: $\frac{27}{13\sqrt{13}}R^2$.